

Основные понятия из теории необходимых условий оптимальности и теории двойственности

Общая формулировка задачи оптимизации

$$f, g \in C^1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X} \quad (1)$$

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0 \\ \forall i = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Необходимые условия оптимальности 1го порядка

Теорема (ККТ). необходимые условия
лок. мин. в 3-це (1) 1-го n-ка

Пусть $x^* \in X$ лок. мин (1) $\Rightarrow$

$\exists \lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ (множители Лагранжа):

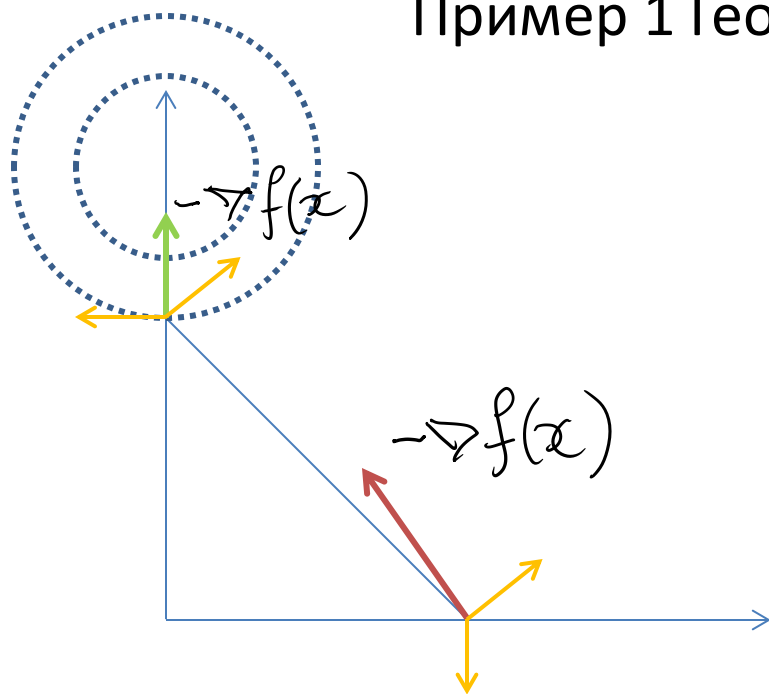
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_i^* \cdot g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$g_i(x^*) \leq 0 \quad (4)$$

Если f, g - выпуклы, то (2) - (4) $\Rightarrow x^*$ - глоб. мин (1)

Пример 1 Геометрический смысл ККТ



$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (y-3)^2$$

$$x + y \leq 1$$

$$x, y \geq 0$$

$$\begin{cases} x + \lambda - \pi_x = 0 \\ y - 3 + \lambda - \pi_y = 0 \end{cases}$$

$$\lambda, \pi_x, \pi_y \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda^* = 2 \\ \pi_x^* = 2 \\ \pi_y^* = 0 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ не удовл ККТ,
т.к. $-\nabla f(x)$ не перпенд в конусе,
задаваемом активн.
ограничениями

Понятие седловой точки

$(x^0, y^0) \in X \times Y$ - седловая точка $f(x, y)$

$$\Leftrightarrow f(x^0, y) \leq f(x^0, y^0) \quad \forall y \in Y \quad (-)$$

$$f(x, y^0) \geq f(x^0, y^0) \quad \forall x \in X \quad (+)$$

Критерий седловой т-ки:

$$f(x^0, y^0) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) =$$

$$= \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y)$$

Л-во: пусть (x^0, y^0) - седловая т.ка,

$$x(y): f(x(y), y) = \min_{x \in X} f(x, y)$$

$$1) \max_y \min_x f(x, y) = \max_y f(x(y), y) \leq \max_y f(x^0, y) = f(x^0, y^0)$$

$$2) \max_y \min_x f(x, y) = \max_y f(x(y), y) \geq f(x(y^0), y^0) = \min_x f(x, y^0) = f(x^0, y^0)$$

$$\boxed{1) + 2) \Rightarrow f(x^0, y^0) = \max_y \min_x f(x, y)}$$

аналогично $f(x^0, y^0) = \min_x \max_y f(x, y)$

Достаточное условие существования седловой точки

Пусть $f(x, y)$ - вогнута по x на X и
выпукла по y на Y

$\Rightarrow$ существует (x^0, y^0) - седловая
точка $f(x, y)$ на $X \times Y$

Примеры: 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x^0, y^0) = (0, 0)$; 2) $f(x, y) = x \cdot y$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 $(x^0, y^0) = (0, 0)$

Связь понятия седловой точки с условиями ККТ

Введем ф-ю Лагранжа, связанную с з. (1):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Теорема 1. (x^*, λ^*) - седловая т.ка $L(x, \lambda)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \Rightarrow x^*$ - глобальное решение з. (1)

До-во: 1) $L(x^*, \lambda) = f(x^*) + \lambda^T g(x^*) \leq f(x^*) + \lambda^{*T} g(x^*)$
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m \Rightarrow (\lambda^T - \lambda^{*T}) g(x^*) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m$
 $\Rightarrow g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i=1, \dots, m. (x^* - \text{гомысума})$

2) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i=1, \dots, m$

3) $f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) = L(x^*, \lambda^*) \leq$
 $\leq L(x, \lambda^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$4) L(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \leq f(x) \quad \forall x: g_i(x) \leq 0$$

$$3) \& 4) \Rightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x: g_i(x) \leq 0, \text{ з.т.г.}$$

Теорема 2. Пусть f, g_i - выпуклы. Тогда

$\exists (x^*, \lambda^*)$ - седловая точка $L(x, \lambda)$ на

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, при этом x^* - решение з.и(1),
 λ^* - множители Лагранжа (см. Теор. KKT)

Сильная двойственность

Следствие. $\min_{x \in X} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$

Экономический смысл множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу оптимизации,
зависимую от параметра в правой части

$\min f(x)$. Пусть $x(b)$ - решение, зависящее
от b
 $x: g(x)=b$

Тогда
$$\frac{df(x(b))}{db} = - \lambda^*(b)$$

$$\begin{aligned}
\underline{\text{D.60:}} \quad f(x(b)) &\equiv L(x(b), \lambda(b)) = \\
&= f(x(b)) + \lambda^T(b)(g(x(b)) - b) \\
\frac{df(x(b))}{db} &= \nabla_x f(x(b)) \frac{dx(b)}{db} + \\
&\quad + \lambda^T(b) \left(\nabla_x g(x(b)) \frac{dx(b)}{db} - E \right) + \\
&\quad + \frac{d\lambda(b)}{db} (g(x(b)) - b) = \\
\underbrace{\left(\nabla_x f(x(b)) + \lambda^T(b) \nabla_x g(x(b)) \right)}_{0''} \frac{dx(b)}{db} - \lambda^T(b) &= \\
&= -\lambda^T(b)
\end{aligned}$$

Пример 1 (продолжение)

$$f(x, y) = x^2 + (y-3)^2 \rightarrow \min_{x+y \leq 1}$$

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + (y-3)^2 + \lambda(x+y-1)$$

$$\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} L(x, y, \lambda) \Leftrightarrow \nabla_{(x, y)} L(x, y, \lambda) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2(y-3) + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x(\lambda) &= -\frac{\lambda}{2} \\ y(\lambda) &= -\frac{\lambda}{2} + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2\right) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda \end{aligned}$$

$$\max_{\lambda \geq 0} L(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} -\frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$$

$$\Leftrightarrow -\lambda + 2 = 0, \lambda = 2$$

$$\Rightarrow x(\lambda) = -1, y(\lambda) = 2$$

Задача. Вычислить производную оптимального значения ЦФ по правой части.

Пример 2 Двойственность в ЛП

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \min \\ Ax &\leq b \end{aligned}$$

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathbb{R}^n} (c^T + \lambda^T A)x - \lambda^T b$$

$$- \lambda^T b = \max_{\lambda \geq 0} \begin{cases} -\lambda^T b, & c^T + \lambda^T A = 0 \\ -\infty, & c^T + \lambda^T A \neq 0 \end{cases} =$$

$$\begin{aligned} &= \max_{\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}_m} b^T \lambda \\ &A^T \lambda = -c \end{aligned}$$

двойственная
задача

Пример 3 Рыночное конкурентное равновесие

Рынок одного товара $x_i \in X_i$ - выпуск i -го поставщика, c_i - c/c_i i -го поставщика; d - спрос

Существует ли равновесная цена, при которой спрос удовлетворен ($\sum_{i=1}^n x_i^* = d$) и стратегии x_i^* каждого поставщика

являются индивидуально-рациональными (максимизируют прибыль i -го участника)?

Рассмотрим задачу "централизованного
планирования":

$$\min_{\substack{x_i \in X_i \\ \sum_i x_i = d}} \sum_i c_i x_i \quad \text{Если } X_i \text{ - выпуклая,}$$

$\exists$ седловая точка
 (x^*, λ^*) :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x_i \in X_i \\ \sum x_i = d}} \sum_i c_i x_i &= \max_{\lambda} \min_{x_i \in X_i} \sum_i c_i x_i + \\ &+ \lambda (\sum_i x_i - d) = \\ &= \min_{x_i \in X_i} \sum_i c_i x_i + \lambda^* (\sum_i x_i - d) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \min_{x_i \in X_i} (c_i x_i + \lambda^* x_i) - \lambda^* d =$$

$$= \sum_{i=1}^n - \max_{x_i \in X_i} (-\lambda^* x_i - c_i x_i) - \lambda^* d$$

задача максимизации
прибыли из участника



$-\lambda^*$ — равновесная цена